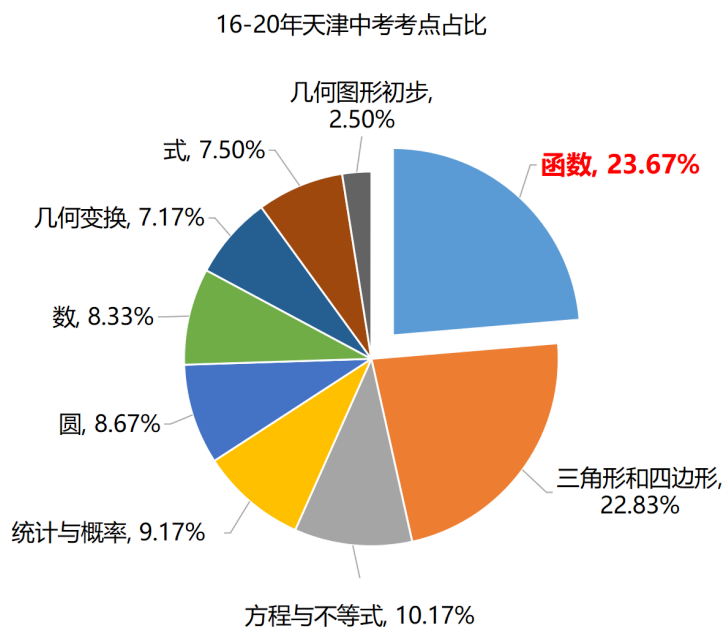


第1讲二次函数与面积问题

《二次函数代几综合之最值、定值问题》是《函数基础》、《二次函数提高》的后续模块，常以25题的形式出现在模考和中考中，难度偏高，题目的综合性较强，需要学生有一定的知识储备，构建一定的知识体系，熟练掌握各模型，以及各类题目的解题技巧。

本模块侧重于二次函数的代几综合，难度较大，适用于二次函数综合的查漏补缺，最值、定值问题的短期突破。本模块分为二次函数与面积问题、二次函数与线段和差最值、二次函数与定值问题3讲内容，配套练习进一步巩固所学内容，专项练习，巩固重难点。

知己知彼



年份	分值	占比	题号	知识点
2020	10	8%	25	最值问题
2019	10	8%	25	最值问题
2018	10	8%	25	存在性问题
2017	10	8%	25	最值问题
2016	10	8%	25	定值问题

一、由坐标求面积

1. 公式法

🔔 教法备注

直接用面积公式来计算图形面积.

思路：点的坐标→线段长度→图形面积

注：此方法一般用于规则图形.

🔔 典题精练

1. 如图，抛物线的顶点坐标是 $\left(\frac{5}{2}, -\frac{9}{8}\right)$ ，且经过点 $A(8, 14)$.

(1) 求该抛物线的解析式 .

(2) 设该抛物线与 y 轴交于点 B ，与 x 轴相交于 C 、 D 两点(点 C 在点 D 的左边)，试求 $\triangle BCD$ 的面积 .

【答案】 (1) $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 2$.

(2) $S_{\triangle BCD} = 3$.

【解析】 (1) 设二次函数解析式为 $y = a\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{9}{8}$,

$\because$ 二次函数过点 $A(8, 14)$,

$$\therefore a \times \left(8 - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{9}{8} = 14 ,$$

$$\text{解得 } a = \frac{1}{2} ,$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{9}{8} ,$$

$$\text{整理得 } y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 2 .$$

(2) 令 $x = 0$ ，得 $y = 2$,

$$\therefore B(0, 2) ,$$

$$\therefore OB = 2 ,$$

$$\text{令 } y = 0 ,$$

$$\text{得 } \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 2 = 0 ,$$

$$\text{解得 } x_1 = 1 , x_2 = 4 ,$$

$$\therefore C(1, 0) , D(4, 0) ,$$

$$\begin{aligned}\therefore CD &= 3, \\ \therefore S_{\triangle BCD} &= \frac{1}{2} \times CD \times OB \\ &= \frac{1}{2} \times 3 \times 2 = 3.\end{aligned}$$

【标注】【知识点】二次函数与面积

2. 已知抛物线 $y = mx^2 + (1 - 2m)x + 1 - 3m$ 与 x 轴相交于不同的两点 A 、 B .

- (1) 求 m 的取值范围 .
- (2) 证明该抛物线一定经过非坐标轴上的一点 P , 并求出点 P 的坐标 .
- (3) 当 $\frac{1}{4} < m \leq 8$ 时 , 由 (2) 求出的点 P 和点 A , B 构成的 $\triangle ABP$ 的面积是否有最值 ? 若有 , 求出该最值及相对应的 m 值 .

【答案】 (1) $m \neq \frac{1}{4}$ 且 $m \neq 0$.

(2) $P(3, 4)$.

(3) 当 $m = 8$ 时 , 面积最大为 : $\frac{31}{4}$.

【解析】 (1) 当 $m = 0$ 时 , 函数为一次函数 , 不符合题意 , 舍去 ;

当 $m \neq 0$ 时 ,

$\therefore$ 抛物线 $y = mx^2 + (1 - 2m)x + 1 - 3m$ 与 x 轴相交于不同的两点 A 、 B ,

$$\therefore \Delta = (1 - 2m)^2 - 4 \times m \times (1 - 3m) = (1 - 4m)^2 > 0 ,$$

$$\therefore 1 - 4m \neq 0 ,$$

$$\therefore m \neq \frac{1}{4} \text{ 且 } m \neq 0 .$$

(2) $\therefore$ 抛物线 $y = mx^2 + (1 - 2m)x + 1 - 3m$,

$$\therefore y = m(x^2 - 2x - 3) + x + 1 ,$$

抛物线过定点说明在这一点 y 与 m 无关 ,

显然当 $x^2 - 2x - 3 = 0$ 时 , y 与 m 无关 ,

解得 : $x = 3$ 或 $x = -1$,

当 $x = 3$ 时 , $y = 4$, 定点坐标为 $(3, 4)$;

当 $x = -1$ 时 , $y = 0$, 定点坐标为 $(-1, 0)$,

$\therefore P$ 不在坐标轴上 ,

$$\therefore P(3, 4) .$$

(3) 方法一 : $|AB| = |x_A - x_B|$

$$= \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|a|}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{(1-2m)^2 - 4m(1-3m)}}{|m|} \\
&= \sqrt{\frac{1-4m+4m^2-4m+12m^2}{m^2}} \\
&= \sqrt{\frac{(1-4m)^2}{m^2}} \\
&= \left| \frac{1-4m}{m} \right| \\
&= \left| \frac{1}{m} - 4 \right|.
\end{aligned}$$

$$\because \frac{1}{4} < m \leq 8,$$

$$\therefore \frac{1}{8} \leq \frac{1}{m} < 4,$$

$$\therefore -\frac{31}{8} \leq \frac{1}{m} - 4 < 0,$$

$$\therefore 0 < \left| \frac{1}{m} - 4 \right| \leq \frac{31}{8},$$

$$\therefore |AB| \text{最大时}, \left| \frac{1}{m} - 4 \right| = \frac{31}{8},$$

$$\text{解得: } m = 8, \text{ 或 } m = \frac{8}{63} \text{ (舍去)},$$

$$\therefore \text{当 } m = 8 \text{ 时}, |AB| \text{有最大值 } \frac{31}{8},$$

此时 $\triangle ABP$ 的面积最大, 没有最小值,

$$\text{则面积最大为: } \frac{1}{2}|AB|y_P = \frac{1}{2} \times \frac{31}{8} \times 4 = \frac{31}{4}.$$

$$\text{方法二: } \because y = mx^2 + (1-2m)x + 1-3m = (mx+1-3m)(x+1),$$

$$\therefore x_1 = -1, x_2 = 3 - \frac{1}{m},$$

$$\therefore AB = |x_1 - x_2| = \left| \frac{1}{m} - 4 \right|.$$

$$\because \frac{1}{4} < m \leq 8, \therefore \frac{1}{8} \leq \frac{1}{m} < 4, \therefore \frac{1}{m} - 4 < 0.$$

$$\therefore AB = 4 - \frac{1}{m}, \therefore S_{\triangle PAB} = \frac{1}{2} \times 4 \times \left(4 - \frac{1}{m} \right) = 8 - \frac{2}{m},$$

$$\because \frac{1}{m} \text{有最小值 } \frac{1}{8}, \text{无最大值},$$

$$\therefore \text{当 } m = 8 \text{ 时}, S_{\triangle PAB} = 8 - \frac{2}{m} \text{有最大值 } 8 - \frac{2}{8} = \frac{31}{4}, \text{无最小值}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{31}{4}.$$

【标注】【知识点】二次函数与面积

2. 割补法

教法备注

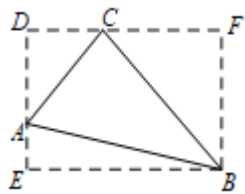
(1) 割

将平面内的几何图形分割成几个可以计算相应线段长度的规则图形，分别利用公式法求每个小块图形的面积得到该几何图形的面积.

(2) 补

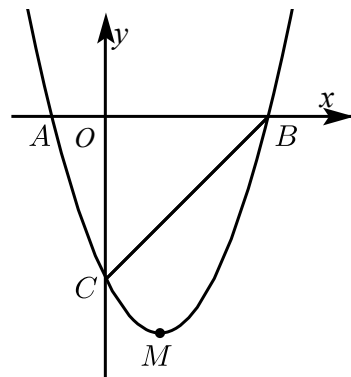
如图，要求 $\triangle ABC$ 的面积，首先过三顶点做横平竖直的直线围成长方形，用长方形面积减掉其他三个直角三角形的面积（即采用整体-部分的方法求目标图形的面积）：

$$S_{\triangle ABC} = S_{\text{矩}DEBF} - S_{\triangle DAC} - S_{\triangle AEB} - S_{\triangle CBF}$$



典题精练

3. 如图，在平面直角坐标系 XOY 中，抛物线 $y = x^2 - 2x + k$ 与 x 轴交于 A 、 B 两点，与 y 轴交于点 $C(0, -3)$ ，顶点为 M 。则四边形 $OBMC$ 的面积为（ ）。



A. 6.5

B. 7.5

C. 8.5

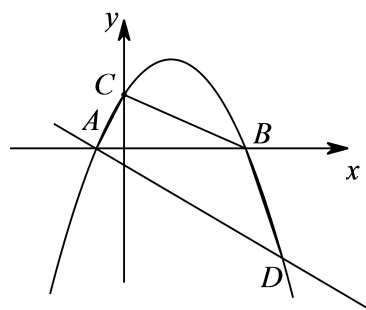
D. 9.5

【答案】B

【解析】过 M 做 x 的垂线，将面积分成梯形面积加三角形面积。

【标注】【知识点】二次函数与面积

4. 如图，已知抛物线 M 与 x 轴交于 $A(-1, 0)$ 、 B 两点，与 y 轴交于 $C(0, 2)$ 点，抛物线的对称轴为直线 $x = \frac{3}{2}$ ，连接 AC 。



- (1) 求抛物线 M 的解析式 .
- (2) 判断 $\triangle ACB$ 的形状 , 并说明理由 .
- (3) 过点 A 作 BC 的平行线 , 交抛物线 M 于另一点 D , 连接 BD . 试求出四边形 $ADBC$ 的面积 .

【答案】 (1) $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2$.

(2) $\triangle ACB$ 为直角三角形 , 证明见解析 .

(3) 12.5 .

【解析】 (1) 设 B 点坐标为 $(a, 0)$,

$$\text{则有 } \frac{-1+a}{2} = \frac{3}{2} ,$$

$$\text{解得 } a = 4 , B(4, 0) .$$

$$\text{设抛物线解析式为 } y = a(x+1)(x-4) ,$$

$$\text{将 } C(0, 2) \text{ 代入 , 解得 } a = -\frac{1}{2} ,$$

$$\therefore y = -\frac{1}{2}(x+1)(x-4) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2 .$$

$$(2) AC = \sqrt{(-1-0)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{5} ,$$

$$AB = 4 - (-1) = 5 ,$$

$$BC = \sqrt{(0-4)^2 + (2-0)^2} = 2\sqrt{5} .$$

$$\therefore AC^2 + BC^2 = AB^2 ,$$

$$\therefore \triangle ACB \text{ 为直角三角形 , 且 } \angle ACB = 90^\circ .$$

(3) 设 BC 的解析式为 $y = kx + b$,

$$\text{将 } C(0, 2) , B(4, 0) \text{ 代入 ,}$$

$$\text{得 } \begin{cases} b = 2 \\ 0 = 4k + b \end{cases} ,$$

$$\text{解得 } \begin{cases} b = 2 \\ k = -\frac{1}{2} \end{cases} ,$$

$$\text{故 } y = -\frac{1}{2}x + 2 .$$

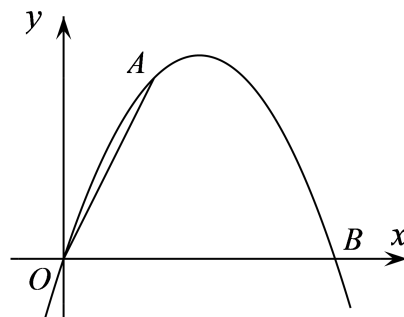
$$\text{设 } AD \text{ 的解析式为 } y = -\frac{1}{2}x + b ,$$

$$\text{将 } A(-1, 0) \text{ 代入 ,}$$

$$\begin{aligned}
 &\text{解得 } b = -\frac{1}{2}, \\
 &\text{故 } y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}. \\
 &\text{联立 } \begin{cases} y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2 \end{cases}, \\
 &\text{解得 } x_1 = 5, x_2 = -1 \text{ (舍)}, \\
 &\text{将 } x = 5 \text{ 代入 } y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}, \\
 &\text{得 } y = -3, D(5, -3), \\
 &S_{\text{四边形}ADBC} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ABD} \\
 &= \frac{1}{2}AB \cdot OC + \frac{1}{2}AB \cdot |y_D| \\
 &= \frac{1}{2} \times 5 \times 2 + \frac{1}{2} \times 5 \times 3 \\
 &= 12.5.
 \end{aligned}$$

【标注】【知识点】二次函数与面积

5. 如图，二次函数 $y = ax^2 + bx$ 的图像经过点 $A(2, 4)$ 与 $B(6, 0)$.



- (1) 求 a, b 的值 .
- (2) 点 C 是该二次函数图像上 A, B 两点之间的一动点，横坐标为 $x (2 < x < 6)$ ，写出四边形 $OACB$ 的面积 S 关于点 C 的横坐标 x 的函数表达式，并求 S 的最大值 .

【答案】(1) $a = -\frac{1}{2}, b = 3$.

(2) S 取得最大值 16 .

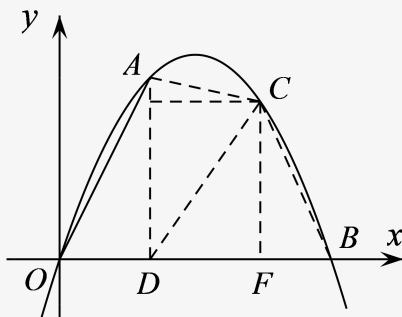
【解析】(1) 把点 $A(2, 4)$ 与 $B(6, 0)$ 代入抛物线，

$$\begin{cases} 4a + 2b = 4 \\ 36a + 6b = 0 \end{cases}$$

解得： $a = -\frac{1}{2}, b = 3$.

(2) 过 A 作 $AD \perp x$ ，又作 $CF \perp x, CE \perp AD$ ，

$$\begin{aligned}\therefore S_{\triangle AOD} &= \frac{1}{2} OD \cdot AD = 4, \\ \therefore S_{\triangle ACD} &= \frac{1}{2} AD \cdot CE = 2x - 4, \\ \therefore S_{\triangle BCD} &= \frac{1}{2} BD \cdot CF = \frac{1}{2} \times 4 \times \left(-\frac{1}{2}x^2 + 3x\right), \\ \therefore S &= S_{\triangle AOD} + S_{\triangle ACD} + S_{\triangle BCD} = -x^2 + 8x, \\ \therefore \text{当 } x &= 4 \text{ 时, } S \text{ 取得最大值 } 16.\end{aligned}$$



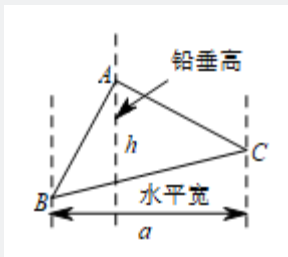
【标注】【知识点】二次函数与面积

3. 铅锤法

教法备注

如图，过 $\triangle ABC$ 的三个顶点分别作出与水平线垂直的三条直线，外侧两条直线之间的距离叫 $\triangle ABC$ 的“水平宽”（ a ），中间的这条直线在 $\triangle ABC$ 内部线段的长度叫 $\triangle ABC$ 的“铅垂高（ h ）”。我们可得出一种计算三角形面积的新方法：

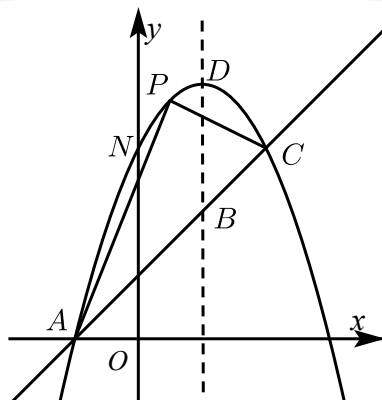
三角形面积等于水平宽与铅垂高乘积的一半，即 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ah$ 。



思考：其实铅锤法求面积也是源于割补思想

典题精练

6. 如图，已知抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 与一直线相交于 $A(-1, 0)$ 、 $C(2, 3)$ 两点，与 y 轴交于点 N ，其顶点为 D 。



(1) 求抛物线及直线 AC 的函数关系式.

(2) 若 P 是抛物线上位于直线 AC 上方的一个动点, 求 $\triangle APC$ 的面积的最大值及此时点 P 的坐标.

【答案】 (1) $y = -x^2 + 2x + 3$, $y = x + 1$.

(2) $P\left(\frac{1}{2}, \frac{15}{4}\right)$.

【解析】 (1) $\therefore$ 将点 A 和点 C 的坐标代入抛物线的解析式得: $\begin{cases} -1 - b + c = 0 \\ -4 + 2b + c = 3 \end{cases}$,

解得: $b = 2$, $c = 3$.

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y = -x^2 + 2x + 3$.

设直线 AC 的解析式为 $y = kx + b$.

$\therefore$ 将点 A 和点 C 的坐标代入得 $\begin{cases} -k + b = 0 \\ 2k + b = 3 \end{cases}$, 解得 $k = 1$, $b = 1$.

$\therefore$ 直线 AC 的解析式为 $y = x + 1$.

(2) 如图, 设点 $P(m, -m^2 + 2m + 3)$,

$\therefore Q(m, m + 1)$,

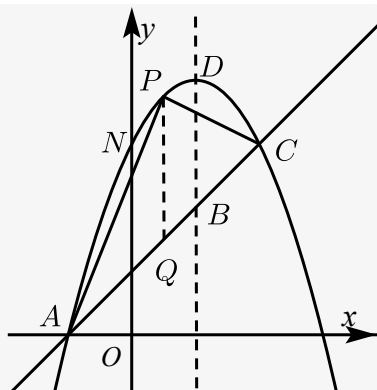
$\therefore PQ = (-m^2 + 2m + 3) - (m + 1) = -m^2 + m + 2 = -\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$,

$\therefore S_{\triangle APC} = \frac{1}{2}PQ \times |x_C - x_A|$

$= \frac{1}{2}\left[-\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}\right] \times 3 = -\frac{3}{2}\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{27}{8}$,

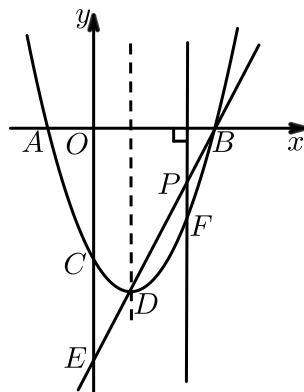
$\therefore$ 当 $m = \frac{1}{2}$ 时, $S_{\triangle APC}$ 最大 $= \frac{27}{8}$, $y = -m^2 + 2m + 3 = \frac{15}{4}$,

$\therefore P\left(\frac{1}{2}, \frac{15}{4}\right)$.



【标注】【知识点】二次函数与轴对称问题

7. 抛物线 $y = x^2 - bx + c$ 与 x 轴交于点 $A(-1, 0)$, $B(3, 0)$, 与 y 轴交于点 C , 顶点为 D , 直线 BD 与 y 轴交于点 E .
- (1) 求顶点 D 的坐标.
- (2) 如图, 设点 P 为线段 BD 上一动点 (点 P 不于点 B 、 D 重合), 过点 P 作 x 轴的垂线与抛物线交于点 F . 求 $\triangle BDF$ 的面积最大值.



【答案】(1) $(1, -4)$.

(2) 1.

【解析】(1) $\because$ 抛物线 $y = x^2 - bx + c$ 与 x 轴交于点 $A(-1, 0)$, $B(3, 0)$,

$$\therefore \begin{cases} (-1)^2 - b \times (-1) + c = 0 \\ 3^2 - 3b + c = 0 \end{cases},$$

$$\text{解方程组得} \begin{cases} b = 2 \\ c = -3 \end{cases},$$

$\therefore$ 抛物线解析式为 $y = x^2 + 2x - 3$,

$$\therefore y = x^2 + 2x - 3 = (x + 1)^2 - 4,$$

$\therefore$ 顶点 D 的坐标为 $(-1, -4)$.

(2) 设直线 BD 的解析式为 $y = kx + b$,

$$\therefore B(3, 0), D(-1, -4),$$

$$\therefore \begin{cases} 3k + b = 0 \\ k + b = -4 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} k = 2 \\ b = -6 \end{cases},$$

$$\therefore BD: y = 2x - 6,$$

设 P 点的坐标为 (m, n) ,

$\therefore$ 点 P 为线段 BD 上一动点, 且不与 B 、 D 重合,

$$\therefore P(m, 2m - 6) (1 < m < 3),$$

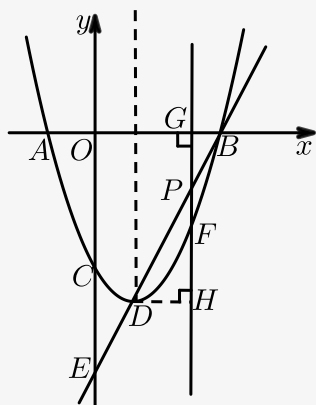
$\therefore$ 点 F 是过点 P 作 x 轴垂线与抛物线的交点,

$$\therefore F(m, m^2 - 2m - 3),$$

又 $\therefore$ 点 P 在 F 上方,

$$\therefore PF = 2m - 6 - (m^2 - 2m - 3) = -m^2 + 4m - 3,$$

设直线 PF 交 x 轴于点 G , 过点 D 作 $DH \perp PF$ 于点 H ,



$$\therefore S_{\triangle BDF} = S_{\triangle PDF} + S_{\triangle PBF}$$

$$= \frac{1}{2} PF \cdot DH + \frac{1}{2} PF \cdot BG$$

$$= \frac{1}{2} PF \cdot (DH + BG)$$

$$= \frac{1}{2} \times (-m^2 + 4m - 3) \times (3 - 1)$$

$$= -m^2 + 4m - 3$$

$$= -(m - 2)^2 + 1.$$

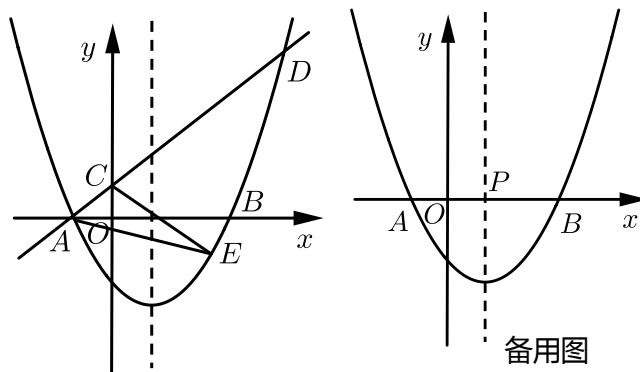
$\therefore S_{\triangle BDF}$ 是关于 m 的二次函数,

$$\therefore a = -1 < 0,$$

$\therefore$ 当 $m = 2$ 时, $\triangle BDF$ 面积取最大值, 最大值为1.

【标注】【知识点】二次函数与动点问题

8. 在平面直角坐标系中, 将二次函数 $y = ax^2 (a > 0)$ 的图象向右平移1个单位, 再向下平移2个单位, 得到如图所示的抛物线, 该抛物线与 x 轴交于点 A 、 B (点 A 在点 B 的左侧), $OA = 1$, 经过点 A 的一次函数 $y = kx + b (k \neq 0)$ 的图象与 y 轴正半轴交于点 C , 且与抛物线的另一个交点为 D , $\triangle ABD$ 的面积为5.



- (1) 求抛物线和一次函数的解析式 .
- (2) 抛物线上的动点 E 在一次函数的图象下方, 求 $\triangle ACE$ 面积的最大值, 并求出此时点 E 的坐标 .

【答案】 (1) $y = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$, $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

(2) $\triangle ACE$ 的面积最大值是 $\frac{25}{16}$, 此时 E 点坐标为 $(\frac{3}{2}, -\frac{15}{8})$.

【解析】 (1) 将二次函数 $y = ax^2 (a > 0)$ 的图象向右平移1个单位, 再向下平移2个单位, 得到的抛物线解析式为 $y = a(x-1)^2 - 2$,

$$\therefore OA = 1,$$

$$\therefore \text{点 } A \text{ 的坐标为 } (-1, 0), \text{ 代入抛物线的解析式得, } 4a - 2 = 0,$$

$$\therefore a = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \text{抛物线的解析式为 } y = \frac{1}{2}(x-1)^2 - 2, \text{ 即 } y = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2},$$

$$\text{令 } y = 0, \text{ 解得 } x_1 = -1, x_2 = 3,$$

$$\therefore B(3, 0),$$

$$\therefore AB = OA + OB = 4,$$

$$\therefore \triangle ABD \text{ 的面积为 } 5,$$

$$\therefore S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}AB \cdot y_D = 5,$$

$$\therefore y_D = \frac{5}{2}, \text{ 代入抛物线解析式得, } \frac{5}{2} = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2},$$

$$\text{解得 } x_1 = -2, x_2 = 4,$$

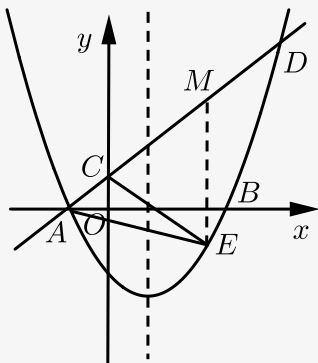
$$\therefore D\left(4, \frac{5}{2}\right),$$

$$\text{设直线 } AD \text{ 的解析式为 } y = kx + b,$$

$$\therefore \begin{cases} 4k + b = \frac{5}{2} \\ -k + b = 0 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} k = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases},$$

$$\therefore \text{直线 } AD \text{ 的解析式为 } y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}.$$

(2) 过点 E 作 $EM \parallel y$ 轴交 AD 于 M , 如图,



$$\begin{aligned}
 &\text{设 } E\left(a, \frac{1}{2}a^2 - a - \frac{3}{2}\right), \text{ 则 } M\left(a, \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\right), \\
 &\therefore EM = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}a^2 + a + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}a^2 + \frac{3}{2}a + 2, \\
 &\therefore S_{\triangle ACE} = S_{\triangle AME} - S_{\triangle CME} \\
 &= \frac{1}{2} \times EM \cdot 1 \\
 &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}a^2 + \frac{3}{2}a + 2 \right) \times 1 \\
 &= -\frac{1}{4}(a^2 - 3a - 4), \\
 &= -\frac{1}{4}\left(a - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{25}{16}, \\
 &\therefore \text{当 } a = \frac{3}{2} \text{ 时, } \triangle ACE \text{ 的面积有最大值, 最大值是 } \frac{25}{16}, \text{ 此时 } E \text{ 点坐标为 } \\
 &\left(\frac{3}{2}, -\frac{15}{8}\right).
 \end{aligned}$$

【标注】【知识点】二次函数与动点问题

9. 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 过点 $A(-6, 0)$, $B(2, 0)$, $C(0, -3)$.
- (1) 求此抛物线的解析式.
- (2) 若点 H 是该抛物线第三象限的任意一点, 求四边形 $OCHA$ 的最大面积.

【答案】(1) $y = \frac{1}{4}x^2 + x - 3$.

(2) $\frac{63}{4}$.

【解析】(1) $\because y = ax^2 + bx + c$ 过点 $A(-6, 0)$, $B(2, 0)$,

$\therefore$ 设抛物线解析式为 $y = a(x + 6)(x - 2)$,

又 $\because$ 抛物线过点 $C(0, -3)$,

$\therefore -12a = -3$,

$a = \frac{1}{4}$,

$\therefore y = \frac{1}{4}(x + 6)(x - 2)$

$$= \frac{1}{4}x^2 + x - 3.$$

$$(2) \text{ 设 } H\left(t, \frac{1}{4}t^2 + t - 3\right),$$

$\because$ 点 H 在第三象限的抛物线上,

$$\therefore -6 < t < 0,$$

$$S_{\text{四边形}OCHA} = S_{\triangle OAH} + S_{\triangle OCH}$$

$$= \frac{1}{2}OA|y_H| + \frac{1}{2}OC|x_H|$$

$$= \frac{1}{2} \times 6 \left(-\frac{1}{4}t^2 - t + 3 \right) + \frac{1}{2} \times 3 \cdot (-t)$$

$$= -\frac{3}{4}t^2 - \frac{9}{2}t + 9$$

$$= -\frac{3}{4}(t+3)^2 + \frac{63}{4}.$$

$\therefore$ 当 $t = 3$ 时, 四边形 $OCHA$ 的面积有最大值 $\frac{63}{4}$.

【标注】【知识点】二次函数与角度问题

二、由面积求坐标

🔗 教法备注

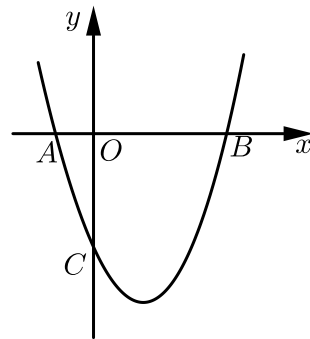
根据面积可以得到坐标系中线段的长度, 但由线段长度向坐标转化的过程中, 会出现符号讨论的问题, 需加倍注意.

思路: 图形面积 $\rightarrow$ 线段长度 $\rightarrow$ 分类讨论点的坐标

1. 面积定值

🔗 典题精练

10. 如图, 抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于 $A(-1, 0)$, $B(3, 0)$ 两点.



(1) 求该抛物线的解析式.

(2) 求该抛物线的对称轴以及顶点坐标.

(3) 设(1)中的抛物线上有一个动点 P , 当点 P 在该抛物线上滑动到什么位置时, 满足 $S_{\triangle PAB} = 8$, 并求出此时 P 点的坐标.

【答案】 (1) $y = x^2 - 2x - 3$.

(2) 对称轴 $x = 1$, 顶点坐标 $(1, -4)$.

(3) 点 P 在该抛物线上滑动到 $(1 + 2\sqrt{2}, 4)$ 或 $(1 - 2\sqrt{2}, 4)$ 或 $(1, -4)$ 时.

【解析】 (1) $\because$ 抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于 $A(-1, 0)$, $B(3, 0)$ 两点,

$\therefore$ 方程 $x^2 + bx + c = 0$ 的两根为 $x = -1$ 或 $x = 3$,

$\therefore -1 + 3 = -b$,

$-1 \times 3 = c$,

$\therefore b = -2, c = -3$,

$\therefore$ 抛物线解析式是 $y = x^2 - 2x - 3$.

(2) $\because y = x^2 - 2x - 3 = (x - 1)^2 - 4$,

$\therefore$ 抛物线的对称轴 $x = 1$, 顶点坐标 $(1, -4)$.

(3) 设 P 的纵坐标为 y_P ,

$\because S_{\triangle PAB} = 8$,

$\therefore \frac{1}{2} AB \cdot |y_P| = 8$,

$\because AB = 3 + 1 = 4$,

$\therefore |y_P| = 4$,

$\therefore y_P = \pm 4$,

把 $y_P = 4$ 代入解析式得, $4 = x^2 - 2x - 3$,

解得, $x = 1 \pm 2\sqrt{2}$,

把 $y_P = -4$ 代入解析式得, $-4 = x^2 - 2x - 3$,

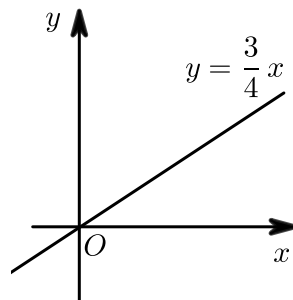
解得, $x = 1$,

$\therefore$ 点 P 在该抛物线上滑动到 $(1 + 2\sqrt{2}, 4)$ 或 $(1 - 2\sqrt{2}, 4)$ 或 $(1, -4)$ 时, 满足

$S_{\triangle PAB} = 8$.

【标注】【知识点】二次函数与面积

11. 一次函数 $y = \frac{3}{4}x$ 的图象如图所示, 它与二次函数 $y = ax^2 - 4ax + c$ 的图象交于 A 、 B 两点(其中点 A 在点 B 的左侧), 与这个二次函数图象的对称轴交于点 C .



(1) 求点 C 的坐标.

(2) 设二次函数图象的顶点为 D .

① 若点 D 与点 C 关于 x 轴对称, 且 $\triangle ACD$ 的面积等于 3, 求此二次函数的关系式.

② 若 $CD = AC$, 且 $\triangle ACD$ 的面积等于 10, 求此二次函数的关系式.

【答案】 (1) 点 $C\left(2, \frac{3}{2}\right)$.

(2) ① $y = \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{2}x$.

② $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{9}{2}$ 或 $y = \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}x - 3$.

【解析】 (1) $\because y = ax^2 - 4ax + c = a(x-2)^2 - 4a + c$,

$\therefore$ 二次函数图象的对称轴为直线 $x = 2$,

当 $x = 2$ 时, $y = \frac{3}{4}x = \frac{3}{2}$,

故点 $C\left(2, \frac{3}{2}\right)$.

(2) ① $\because$ 点 D 与点 C 关于 x 轴对称,

$\therefore D\left(2, -\frac{3}{2}\right)$,

$\therefore CD = 3$,

设 $A\left(m, \frac{3}{4}m\right)$ ($m < 2$),

由 $S_{\triangle ACD} = 3$ 得: $\frac{1}{2} \times 3 \times (2 - m) = 3$,

解得 $m = 0$,

$\therefore A(0, 0)$.

由 $A(0, 0)$ 、 $D\left(2, -\frac{3}{2}\right)$ 得:

$$\begin{cases} c = 0 \\ -4a + c = -\frac{3}{2} \end{cases},$$

解得: $a = \frac{3}{8}$, $c = 0$.

$\therefore y = \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{2}x$.

② 设 $A\left(m, \frac{3}{4}m\right)$ ($m < 2$),

过点A作 $AE \perp CD$ 于E, 则 $AE = 2 - m$, $CE = \frac{3}{2} - \frac{3}{4}m$,

$$AC = \sqrt{AE^2 + CE^2} = \sqrt{(2-m)^2 + \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{4}m\right)^2} = \frac{5}{4}(2-m),$$

$$\therefore CD = AC,$$

$$\therefore CD = \frac{5}{4}(2-m),$$

$$\text{由 } S_{\triangle ACD} = 10 \text{ 得 } \frac{1}{2} \times \frac{5}{4}(2-m)^2 = 10,$$

解得: $m = -2$ 或 $m = 6$ (舍去),

$$\therefore m = -2,$$

$$\therefore A\left(-2, -\frac{3}{2}\right), CD = 5,$$

当 $a > 0$ 时, 则点D在点C下方,

$$\therefore D\left(2, -\frac{7}{2}\right),$$

由 $A\left(-2, -\frac{3}{2}\right)$ 、 $D\left(2, -\frac{7}{2}\right)$ 得:

$$\begin{cases} 12a + c = -\frac{3}{2} \\ -4a + c = -\frac{7}{2} \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} a = \frac{1}{8} \\ c = -3 \end{cases},$$

$$\therefore y = \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}x - 3;$$

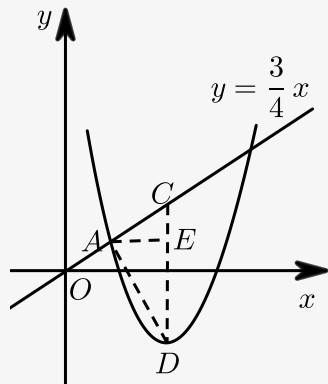
当 $a < 0$ 时, 则点D在点C上方,

$$\therefore D\left(2, \frac{13}{2}\right),$$

$$\text{由 } A\left(-2, -\frac{3}{2}\right)、D\left(2, \frac{13}{2}\right) \text{ 得: } \begin{cases} 12a + c = -\frac{3}{2} \\ -4a + c = \frac{13}{2} \end{cases},$$

$$\text{解得 } \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ c = \frac{9}{2} \end{cases},$$

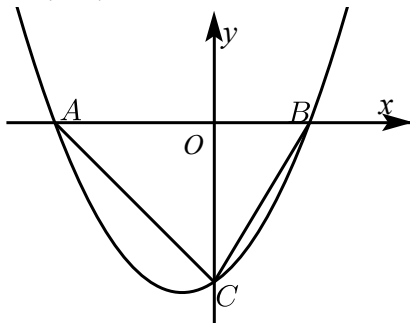
$$\therefore y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{9}{2}.$$



2. 面积相等

典题精练

12. 如图，抛物线 $y = ax^2 + bx - 5$ ($a \neq 0$) 与 x 轴交于点 $A(-5, 0)$ 和点 $B(3, 0)$ ，与 y 轴交于点 C 。



(1) 求该抛物线的解析式及顶点坐标。

(2) 若点 E 为 x 轴下方抛物线上的一动点，当 $S_{\triangle ABE} = S_{\triangle ABC}$ 时，求点 E 的坐标。

【答案】(1) 抛物线解析式为 $y = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x - 5$ ，顶点坐标为 $(-1, -\frac{16}{3})$ 。

(2) E 点坐标为 $(-2, -5)$ 。

【解析】(1)

把 A 、 B 两点坐标代入解析式可得 $\begin{cases} 25a - 5b - 5 = 0 \\ 9a + 3b - 5 = 0 \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = \frac{2}{3} \end{cases}$ ，

$\therefore$ 抛物线解析式为 $y = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x - 5$ ，

当 $x = -\frac{\frac{2}{3}}{2 \times \frac{1}{3}} = -1$ 时， $y = \frac{1}{3} \times (-1)^2 + \frac{2}{3} \times (-1) - 5 = -\frac{16}{3}$ ，

故抛物线顶点坐标为 $(-1, -\frac{16}{3})$ 。

(2) 在 $y = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x - 5$ 中，令 $x = 0$ 可得 $y = -5$ ，

$\therefore C(0, -5)$ ，

$\because S_{\triangle ABE} = S_{\triangle ABC}$ ，且 E 点在 x 轴下方的抛物线上，

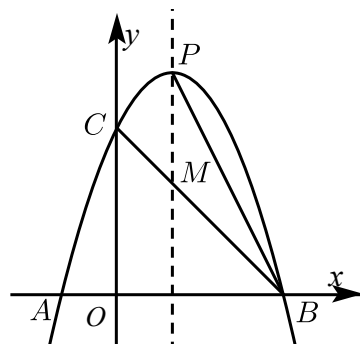
$\therefore E$ 点纵坐标和 C 点纵坐标相同，

当 $y = -5$ 时，代入可得 $\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x - 5 = -5$ ，

解得 $x = -2$ 或 $x = 0$ (舍去)，

$\therefore E$ 点坐标为 $(-2, -5)$ 。

13. 如图，抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 经过 $A(-1, 0)$ 、 $B(3, 0)$ 、 $C(0, 3)$ 三点，对称轴与抛物线相交于点 P ，与直线 BC 相交于点 M ，连接 PB 。



- (1) 求该抛物线的解析式。
 (2) 抛物线上是否存在一点 Q (不与点 P 重合)，使 $\triangle QMB$ 与 $\triangle PMB$ 的面积相等，若存在，求点 Q 的横坐标；若不存在，说明理由。

【答案】 (1) $y = -x^2 + 2x + 3$.

(2) 存在， $Q_1(2, 3)$ ， $Q_2\left(\frac{3 - \sqrt{17}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}\right)$ ， $Q_3\left(\frac{3 + \sqrt{17}}{2}, \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}\right)$

【解析】 (1) 设抛物线解析式为 $y = a(x - 3)(x + 1)$.

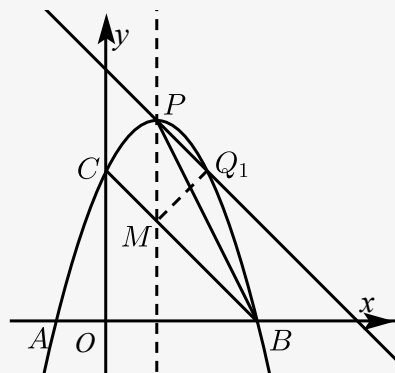
$$\therefore 3 = a \cdot (-3), \text{ 即 } a = -1,$$

$$\therefore \text{所求解析式为 } y = -x^2 + 2x + 3.$$

$$(2) \because y = -x^2 + 2x + 3,$$

$$\therefore \text{顶点 } P \text{ 的坐标为 } (1, 4).$$

①如图，



当点 Q 在直线 BC 上方时，过点 P 作直线 BC 的平行线交抛物线于点 Q_1 ，易求直线 BC 的解析式为 $y = -x + 3$ ，

$$\therefore \text{设直线 } PQ_1 \text{ 的解析式为 } y = -x + n,$$

$$\therefore \text{直线 } PQ_1 \text{ 过点 } P(1, 4), \text{ 代入求得 } n = 5.$$

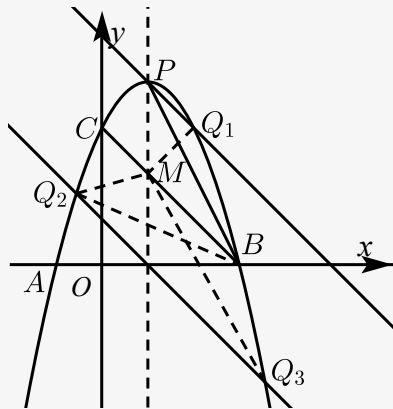
∴直线 PQ_1 的解析式为 $y = -x + 5$.

$$\text{解方程组 } \begin{cases} y = -x + 5 \\ y = -x^2 + 2x + 3 \end{cases}, \text{ 得 } \begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 4 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = 2 \\ y_2 = 3 \end{cases}.$$

∴点 $(1, 4)$ 与 P 点重合.

∴点 $Q_1(2, 3)$.

②如图,



当点 Q 在直线 BC 下方时,

把直线 BC 向下平移2个单位, 交抛物线于点 Q_2 、 Q_3 ,

$$\text{解方程组 } \begin{cases} y = -x + 1 \\ y = -x^2 + 2x + 3 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} x_1 = \frac{3 + \sqrt{17}}{2} \\ y_1 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} \end{cases}, \begin{cases} x_2 = \frac{3 - \sqrt{17}}{2} \\ y_2 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \end{cases}.$$

综上所述, $Q_1(2, 3)$, $Q_2\left(\frac{3 - \sqrt{17}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}\right)$,

$Q_3\left(\frac{3 + \sqrt{17}}{2}, \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}\right)$.

【标注】【知识点】二次函数与面积

3. 面积成比例

典题精练

14. 在平面直角坐标系中, O 为原点, 抛物线 $y = ax^2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}x$ ($a \neq 0$) 经过点 $A(\sqrt{3}, -3)$, 对称轴为直线 l , 点 O 关于直线 l 的对称点为点 B . 过点 A 作直线 $AC \parallel x$ 轴, 交 y 轴于点 C .
- (1) 求该抛物线的解析式及对称轴.
 - (2) 抛物线上是否存在点 Q , 使得 $S_{\triangle AOC} = \frac{1}{3}S_{\triangle AOQ}$, 若存在, 求出点 Q 的坐标, 若不存在, 请说明理由.

【答案】 (1)

$$y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}x, x = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

(2) 抛物线上存在点 Q , 坐标为 $(3\sqrt{3}, 0)$ 或 $(-2\sqrt{3}, 15)$, 使得 $S_{\triangle AOC} = \frac{1}{3}S_{\triangle AOQ}$.

【解析】(1) $\because y = ax^2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}x (a \neq 0)$ 经过点 $A(\sqrt{3}, -3)$,

$$\therefore -3 = a \times (\sqrt{3})^2 - \frac{3\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{3},$$

$$\text{解得 } a = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \text{抛物线的解析式为 } y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}x,$$

$$\therefore x = -\frac{b}{2a} = \frac{-\frac{3\sqrt{3}}{2}}{2 \times \frac{1}{2}} = \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore \text{抛物线的对称轴为直线 } x = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

(2) $\because A(\sqrt{3}, -3), AC \parallel x$ 轴,

$$\therefore AC = \sqrt{3}, OC = 3,$$

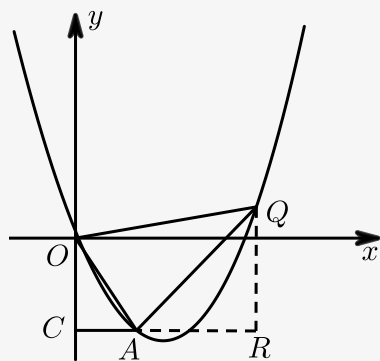
$$\therefore S_{\triangle AOC} = \frac{1}{2}OC \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{又 } \because S_{\triangle AOC} = \frac{1}{3}S_{\triangle AOQ},$$

$$\therefore S_{\triangle AOQ} = 3S_{\triangle AOC} = \frac{9\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{设 } Q \text{ 点坐标为 } \left(m, \frac{1}{2}m^2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}m\right),$$

如图情况一, 作 $QR \perp CA$, 交 CA 延长线于点 R ,



$$\therefore S_{\triangle AOQ} = S_{\text{梯形 } OCRQ} - S_{\triangle AQR} - S_{\triangle AOC} = \frac{9\sqrt{3}}{2},$$

$\therefore$

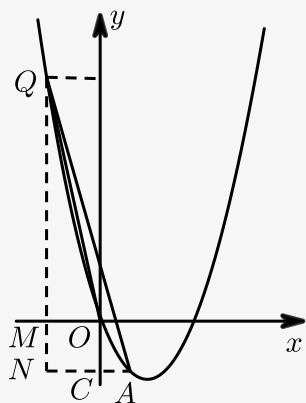
$$\frac{1}{2} \cdot m \left(3 + \frac{1}{2}m^2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}m + 3\right) - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot 3 - \frac{1}{2}(m - \sqrt{3}) \left(\frac{1}{2}m^2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}m + 3\right) = \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

,

$$\text{化简整理得 } m^2 - \sqrt{3}m - 18 = 0,$$

$$\text{解得 } m_1 = 3\sqrt{3}, m_2 = -2\sqrt{3},$$

如图情况二，作 $QN \perp AC$ ，交 AC 延长线于点 N ，交 x 轴于点 M ，



$$\therefore S_{\triangle AOQ} = S_{\triangle AQN} - S_{\triangle QMO} - S_{\text{梯形} OMNA} = \frac{9\sqrt{3}}{2},$$

$\therefore$

$$\frac{1}{2}(\sqrt{3}-m)\left(\frac{1}{2}m^2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}m + 3\right) - \frac{1}{2}(-m)\left(\frac{1}{2}m^2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}m\right) - \frac{3}{2}(-m + \sqrt{3} - m) = \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{化简整理得 } m^2 - \sqrt{3}m - 18 = 0,$$

$$\text{解得 } m_1 = 3\sqrt{3}, m_2 = -2\sqrt{3},$$

$$\therefore Q \text{ 点坐标为 } (3\sqrt{3}, 0) \text{ 或 } (-2\sqrt{3}, 15),$$

$$\therefore \text{抛物线上存在点 } Q, \text{ 使得 } S_{\triangle AOC} = \frac{1}{3} S_{\triangle AOQ}.$$

【标注】【知识点】根据条件写一次函数解析式

15. 已知抛物线 $l: y = \frac{1}{2}(x-h)^2 - 2$ 与 x 轴交于 A, B 两点（点 A 在点 B 的左侧），将抛物线 l 在 x 轴下方部分沿 x 轴翻折， x 轴上方的图象保持不变，就组成了函数 f 的图象．

(1) 若点 A 的坐标为 $(1, 0)$ ．

① 求抛物线 l 的解析式．

② 直接写出当 x 为何值时，函数 f 的值 y 随 x 的增大而增大．

③ 过 A 点的直线交函数 f 的图象交于另外两点 P, Q ，且 $S_{\triangle ABQ} = 2S_{\triangle ABP}$ ，求 P 的坐标．

(2) 当 $2 < x < 3$ 时，若函数 f 的值随 x 的增大而增大，直接写出 h 的取值范围．

【答案】 (1) ① $y = \frac{1}{2}(x-3)^2 - 2$ ．

② 当 $1 < x < 3$ 或 $x > 5$ 时， y 随 x 的增大而增大．

③ $P(\frac{11}{3}, \frac{16}{9})$ ．

(2) $3 \leq h \leq 4$ 或 $h \leq 0$ ．

【解析】(1) ① 把 $(1, 0)$ 代入抛物线 $y = \frac{1}{2}(x - h)^2 - 2$ 中, 得 $h = -1$ 或 $h = 3$,

$\therefore A$ 在点 B 的左侧,

$\therefore h = 3$,

$\therefore$ 抛物线解析式为: $y = \frac{1}{2}(x - 3)^2 - 2$.

② $\therefore h = 3, y = \frac{1}{2}(x - 3)^2 - 2$,

$\therefore$ 抛物线的对称轴是直线: $x = 3$,

由对称性得: $B(5, 0)$,

由图象可知: 当 $1 < x < 3$ 或 $x > 5$ 时, y 随 x 的增大而增大.

③ 如图, 作 $PD \perp x$ 轴于 D , 延长 PD 交抛物线 l 于点 F , 作 $QE \perp x$ 轴于 E ,

$\therefore PD = DF, S_{\triangle ABQ} = 2S_{\triangle ABP}$,

$\therefore \frac{1}{2}AB \cdot QE = 2 \times \frac{1}{2}AB \cdot PD$,

$\therefore QE = 2PD$,

$\therefore PD \parallel QE$,

$\therefore \frac{AE}{AD} = \frac{QE}{PD}$,

$\therefore AE = 2AD$,

设 $AD = a$, 则 $OD = a + 1, OE = 1 + 2a$,

代入抛物线得: F 的纵坐标为 $\frac{1}{2}(1 + a - 3)^2 - 2$,

又 $\therefore PD = DF$,

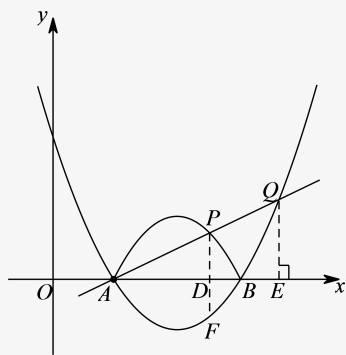
$\therefore PD = -\frac{1}{2}(1 + a - 3)^2 + 2$,

$QE = \frac{1}{2}(1 + 2a - 3)^2 - 2$,

$\therefore \frac{1}{2}(1 + 2a - 3)^2 - 2 = 2 \times \left[-\frac{1}{2}(1 + a - 3)^2 + 2 \right]$,

解得: $a = \frac{8}{3}$ 或 $a = 0$ (舍)

$\therefore P(\frac{11}{3}, \frac{16}{9})$.



(2) 当 $y = 0$ 时, $\frac{1}{2}(x - h)^2 - 2 = 0$,

解得: $x = h + 2$ 或 $x = h - 2$,

$\therefore A$ 在 B 的左侧,

$\therefore A(h - 2, 0), B(h + 2, 0)$,

如图, 作抛物线的对称轴交抛物线于 C ,

分两种情况

① 由图象可知, 图象 f 在 AC 段时, 函数 f 随 x 增大而增大,

则 $\begin{cases} h - 2 \leq 2 \\ h \geq 3 \end{cases}$,

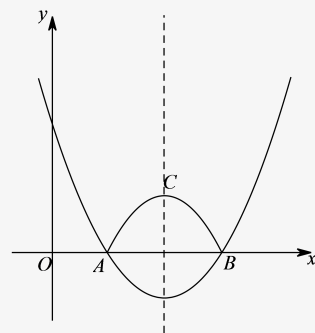
$$\therefore 3 \leq h \leq 4.$$

②由图象可知， f 在 B 的右侧时，函数 f 随 x 增大而增大，

$$\text{即 } h + 2 \leq 2,$$

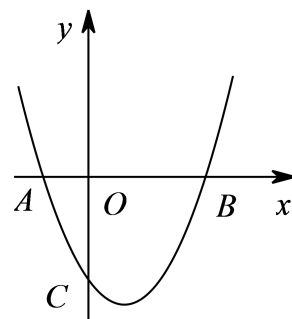
$$\therefore h \leq 0,$$

综上 $3 \leq h \leq 4$ 或 $h \leq 0$ 时，函数 f 的值随 x 增大而增大。

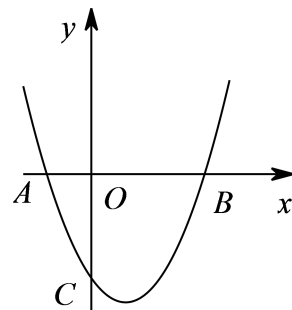


【标注】【知识点】二次函数与面积

16. 在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于点 A, B (A 在 B 的左侧)，抛物线的对称轴为直线 $x = 1$ ， $AB = 4$ 。



- (1) 求抛物线的表达式。
- (2) 抛物线上有两点 $M(x_1, y_1)$ 和 $N(x_2, y_2)$ ，若 $x_1 < 1$ ， $x_2 > 1$ ， $x_1 + x_2 > 2$ ，试判断 y_1 与 y_2 的大小，并说明理由。
- (3) 平移该抛物线，使平移后的抛物线经过点 O ，且与 x 轴交于点 D ，记平移后的抛物线顶点为 P ，当 $\triangle ODP$ 是等腰直角三角形时，直线 $x = m$ ($0 < m < 3$)分别交线段 BP, BC 于点 E, F ，且 $\triangle BEF$ 的面积: $\triangle BPC$ 的面积 = $2:3$ ，求 m 的值。



备用图

【答案】 (1) $y = x^2 - 2x - 3$ 。

(2) $y_1 < y_2$, 证明见解析.

(3) m 的值为 1 或 $3 - 2\sqrt{2}$.

【解析】(1) $\because$ 抛物线的对称轴为直线 $x = 1$, $AB = 4$,

$\therefore A(-1, 0)$, $B(3, 0)$,

$\therefore$ 抛物线解析式为 $y = (x + 1)(x - 3)$,

即 $y = x^2 - 2x - 3$.

(2) $\because x_1 < 1$, $x_2 > 1$,

$\therefore M$ 、 N 在对称轴的两侧,

$\because x_1 + x_2 > 2$,

$\therefore x_2 - 1 > 1 - x_1$,

$\therefore$ 点 N 到直线 $x = 1$ 的距离比 M 点到直线 $x = 1$ 的距离远,

$\therefore y_1 < y_2$.

(3) ①作 $PH \perp x$ 轴于点 H ,

$\because \triangle OPD$ 为等腰直角三角形,

$\therefore PH = OH = OD$,

当点 D 在 x 轴的正半轴上, 如图 1,

设 $P(m, -m)$, 则 $D(2m, 0)$,

设抛物线的解析式为 $y = x(x - 2m)$,

把 $P(m, -m)$ 代入, 得:

$m(m - 2m) = -m$,

解得: $m_1 = 0$ (舍), $m_2 = 1$,

即 $P(1, -1)$.

当点 D 在 x 轴的负半轴上,

设 $P(m, m)$, 则 $D(2m, 0)$,

设抛物线的解析式为 $y = x(x - 2m)$,

把 $P(m, m)$ 代入, 得: $m(m - 2m) = m$,

解得: $m_1 = 0$ (舍), $m_2 = -1$,

$\therefore P(-1, -1)$.

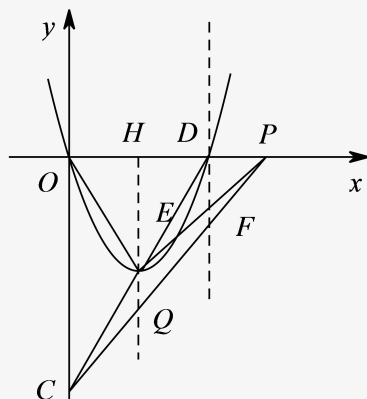
综上所述, P 的坐标为 $(1, -1)$ 或 $(-1, -1)$.

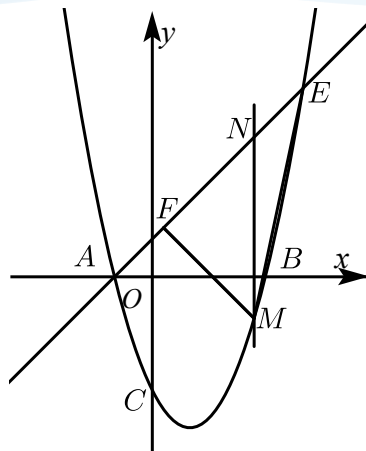
②当点 D 在 x 轴的正半轴上, 延长 HP 交 BC 于点 Q ,

设直线 BP 的解析式为 $y = px + q$,

把 $B(3, 0)$, $P(1, -1)$ 代入, 得:

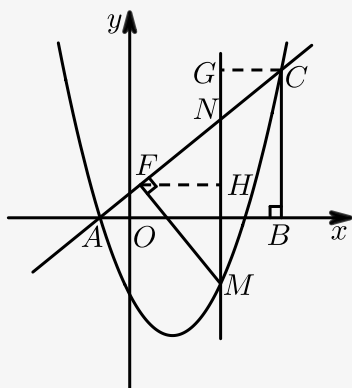
$$\begin{cases} 3p + q = 0 \\ p + q = -1 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} p = \frac{1}{2} \\ q = -\frac{3}{2} \end{cases},$$





【答案】 $M_1(2, -3)$; $M_2\left(\frac{1}{3}, -\frac{32}{9}\right)$.

【解析】 过点 F 作 $FH \perp MN$ 于 H , 过 C 作 $CG \perp MN$ 于 G ,



则 $\angle ANM = \angle ACB = 45^\circ$,

$\therefore MF \perp AC$,

$\therefore FH = \frac{1}{2}MN$,

$\therefore \frac{S_{\triangle FMN}}{S_{\triangle CMN}} = \frac{FH}{CG} = \frac{MN}{2CG}$,

$\therefore A(-1, 0)$, $C(4, 5)$,

$\therefore$ 直线 AC 的解析式为 $y = x + 1$,

设 $M(m, m^2 - 2m - 3)$, 其中 -1 由 $MN \parallel BC$ 得 , $N(m, m + 1)$,

$\therefore MN$ 的长为 : $(m + 1) - (m^2 - 2m - 3) = -m^2 + 3m + 4$,

当 $\frac{S_{\triangle FMN}}{S_{\triangle CMN}} = \frac{2}{3}$ 时 , 则 $3MN = 4CG$, 即 $3(-m^2 + 3m + 4) = 4(4 - m)$,

解得 $m_1 = \frac{1}{3}$, $m_2 = 4$ (舍去) ,

$\therefore M\left(\frac{1}{3}, -\frac{32}{9}\right)$,

当 $\frac{S_{\triangle FMN}}{S_{\triangle CMN}} = \frac{3}{2}$ 时 , 则 $2MN = 6CG$, 即 $2(-m^2 + 3m + 4) = 6(4 - m)$,

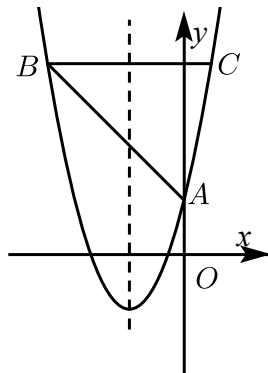
解得 $m_3 = 2$, $m_4 = 4$ (舍去) ,

$\therefore M(2, -3)$.

综上，当 M 的坐标为 $\left(\frac{1}{3}, -\frac{32}{9}\right)$ 或 $(2, -3)$ 时， MN 将 $\triangle MFC$ 的面积分成2:3两部分。

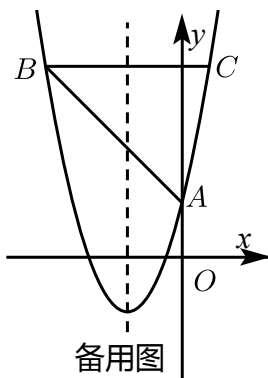
【标注】【知识点】二次函数与面积

18. 如图，抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 与 y 轴交于点 $A(0, 2)$ ，对称轴为直线 $x = -2$ ，平行于 x 轴的直线与抛物线交于 B 、 C 两点，点 B 在对称轴左侧， $BC = 6$ 。



(1) 求此抛物线的解析式。

(2) 若过点 C 的直线 l 将 $\triangle ABC$ 的面积分成2:3两部分，试求直线 l 的解析式。



【答案】(1) $y = x^2 + 4x + 2$ 。

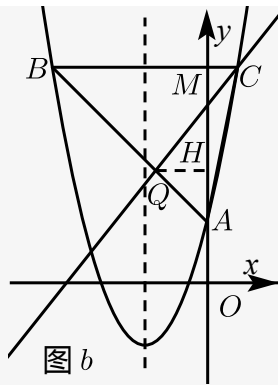
(2) $y = x + 6$ 或 $y = \frac{1}{2}x + \frac{13}{2}$ 。

【解析】(1) 由题意可得， $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{b}{2} = -2$ ， $c = 2$ ，

$\therefore$ 解得 $b = 4$ ，

$\therefore$ 此抛物线的解析式为 $y = x^2 + 4x + 2$ 。

(2) 如图 b ，设直线 AB 解析式为 $y = kx + 2$ ，



把 B 坐标代入得 $k = -1$ ，即 $y = -x + 2$ ，

设直线 l 与 AB 交于点 Q ，过 Q 作 $QH \perp y$ 轴，垂足为 H ，

设 BC 与 y 轴交于点 M ，可得 $\triangle AQH \sim \triangle ABM$ ，

$$\therefore \frac{QH}{BM} = \frac{AQ}{AB}，$$

$\because$ 直线 CQ 将 $\triangle ABC$ 面积分成 $2:3$ 两部分，

$$\therefore AQ:QB = 2:3 \text{ (或 } 3:2 \text{)}，$$

$$\therefore AQ:AB = 2:5 \text{ (或 } 3:5 \text{)}，$$

$$\therefore BM = 5，$$

$$\therefore QH = 2 \text{ 或 } QH = 3，$$

当 $QH = 2$ 时，把 $x = -2$ 代入直线 AB 解析式得 $y = 4$ ，

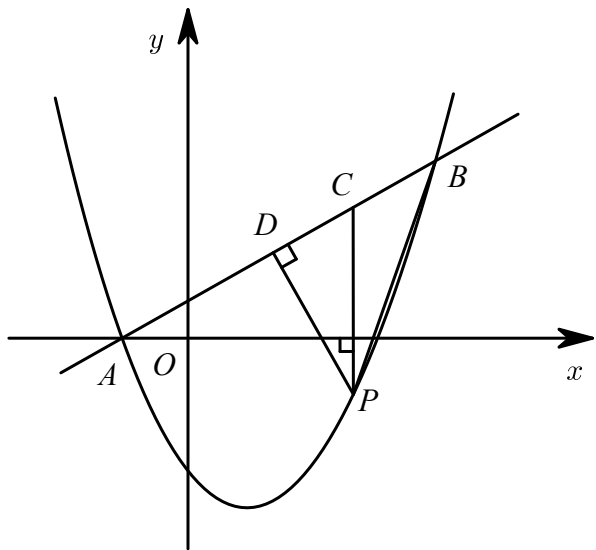
此时 $Q(-2, 4)$ ，直线 l 解析式为 $y = x + 6$ ，

当 $QH = 3$ 时，把 $x = -3$ 代入直线 AB 解析式得 $y = 5$ ，

此时 $Q(-3, 5)$ ，直线 l 解析式为 $y = \frac{1}{2}x + \frac{13}{2}$ 。

【标注】【知识点】二次函数与面积

19. 如图，在平面直角坐标系中，直线 $y = \frac{1}{2}x + 1$ 与抛物线 $y = ax^2 + bx - 3$ 交于 A, B 两点，点 A 在 x 轴上，点 B 的纵坐标为 3 。点 P 是直线 AB 下方的抛物线上一动点（不与点 A, B 重合），过点 P 作 x 轴的垂线交直线 AB 于点 C ，作 $PD \perp AB$ 于点 D 。



(1) 求 a , b 及 $\sin \angle ACP$ 的值.

(2) ① 设点 P 的横坐标为 m . 用含 m 的代数式表示线段 PD 的长, 并求出线段 PD 长的最大值;

② 连接 PB , 线段 PC 把 $\triangle PDB$ 分成两个三角形, 是否存在适合的 m 值, 使这两个三角形的面积之比为 $9:10$? 若存在, 直接写出 m 的值; 若不存在, 说明理由.

【答案】 (1) $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$, $\sin \angle ACP = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

(2) ①

$$PD = -\frac{\sqrt{5}}{5}(m-1)^2 + \frac{9\sqrt{5}}{5} \quad (-2 < m < 4).$$

$$\therefore \text{当 } m = 1 \text{ 时, } PD_{\text{最大值}} = \frac{9\sqrt{5}}{5}.$$

$$\text{② } m = \frac{5}{2} \text{ 或 } \frac{32}{9}.$$

【解析】 (1) 由 $\frac{1}{2}x + 1 = 0$, 得 $x = -2$, $\therefore A(-2, 0)$,

$$\text{由 } \frac{1}{2}x + 1 = 3, \text{ 得 } x = 4, \therefore B(4, 3).$$

$\therefore y = ax^2 + bx - 3$ 经过 A 、 B 两点,

$$\therefore \begin{cases} (-2)^2 \cdot a - 2b - 3 = 0, \\ 4^2 \cdot a + 4b - 3 = 3 \end{cases} \therefore a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2},$$

设直线 AB 与 y 轴交于点 E , 则 $E(0, 1)$.

$\therefore PC \parallel y$ 轴, $\therefore \angle ACP = \angle AEO$.

$$\therefore \sin \angle ACP = \sin \angle AEO = \frac{OA}{AE} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

(2) ① 由 (1) 知, 抛物线的解析式为 $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3$, $P(m, \frac{1}{2}m^2 - \frac{1}{2}m - 3)$

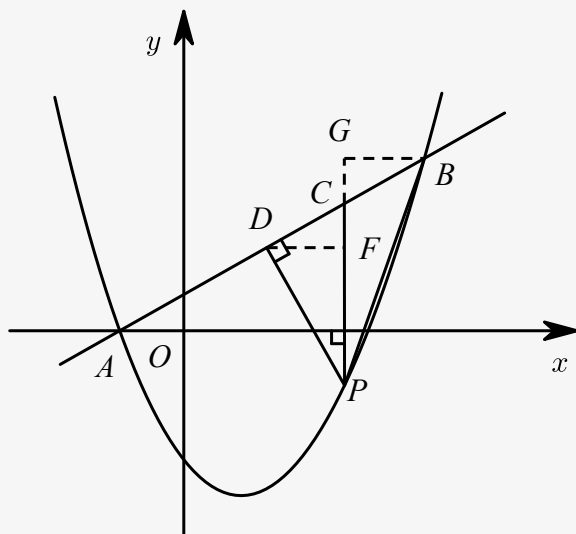
$$, C(m, \frac{1}{2}m + 1),$$

$$\therefore PC = \frac{1}{2}m + 1 - (\frac{1}{2}m^2 - \frac{1}{2}m - 3) = -\frac{1}{2}m^2 + m + 4,$$

$$PD = PC \cdot \sin \angle ACP = -\frac{\sqrt{5}}{5}(m-1)^2 + \frac{9\sqrt{5}}{5} (-2 < m < 4).$$

$$\therefore \text{当 } m = 1 \text{ 时, } PD_{\text{最大值}} = \frac{9\sqrt{5}}{5}.$$

②如图, 分别过点D、B作 $DF \perp PC$ 于F、 $BG \perp PC$ 于G, 当



$$\frac{S_{\triangle PCD}}{S_{\triangle PBC}} = \frac{DF}{BG} = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}PD}{BG} = \frac{-\frac{1}{5}(m^2 - 2m - 8)}{4 - m} = \frac{m + 2}{5} = \frac{9}{10} \text{ 时, 解得}$$

$$m = \frac{5}{2};$$

$$\text{当 } \frac{S_{\triangle PCD}}{S_{\triangle PBC}} = \frac{m + 2}{5} = \frac{10}{9} \text{ 时, 解得 } m = \frac{32}{9}.$$

$$\text{故存在满足条件的值, } m = \frac{5}{2} \text{ 或 } \frac{32}{9}.$$

【标注】【知识点】二次函数与面积

5. 相似三角形

典题精练

20. 抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 与 y 轴交于点 $C(0, -4)$, 与 x 轴交于点 A, B , 且 $B(2, 0)$.

(1) 求该抛物线的解析式.

(2) 若点 P 是线段 AB 上的一动点, 过点 P 作 $PE \parallel AC$, 交 BC 于点 E , 连接 CP , 求 $\triangle PCE$ 面积的最大值.

【答案】(1) 为 $y = \frac{1}{2}x^2 + x - 4$.

(2) 3.

【解析】(1) 把点 $C(0, -4)$, $B(2, 0)$ 分别代入 $y = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 中,

$$\begin{aligned} &\text{得} \begin{cases} c = -4 \\ \frac{1}{2} \times 2^2 + 2b + c = 0 \end{cases} \\ &\text{解得} \begin{cases} c = -4 \\ b = 1 \end{cases}, \end{aligned}$$

$\therefore$ 该抛物线的解析式为 $y = \frac{1}{2}x^2 + x - 4$.

(2) 令 $y = 0$, 即 $\frac{1}{2}x^2 + x - 4 = 0$,

解得 $x_1 = -4$, $x_2 = 2$,

$\therefore A(-4, 0)$, $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot OC = 12$,

设 P 点坐标为 $(x, 0)$, 则 $PB = 2 - x$,

$\therefore PE \parallel AC$,

$\therefore \angle BPE = \angle BAC$, $\angle BEP = \angle BCA$,

$\therefore \triangle PBE \sim \triangle BAC$,

$\therefore \frac{S_{\triangle PBE}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{PB}{AB}\right)^2$, 即 $\frac{S_{\triangle PBE}}{12} = \left(\frac{2-x}{6}\right)^2$,

化简得: $S_{\triangle PBE} = \frac{1}{3}(2-x)^2$.

$S_{\triangle PCE} = S_{\triangle PCE} - S_{\triangle PBE} = -\frac{1}{2}PB \cdot OC - S_{\triangle PBE} = \frac{1}{2} \times (2-x) \times 4 - \frac{1}{3}(2-x)^2$

$= -\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$

$= -\frac{1}{3}(x+1)^2 + 3$.

$\therefore$ 当 $x = -1$ 时, $S_{\triangle PCE}$ 的最大值为 3.

【标注】【能力】运算能力

【思想】函数思想

【知识点】二次函数与面积

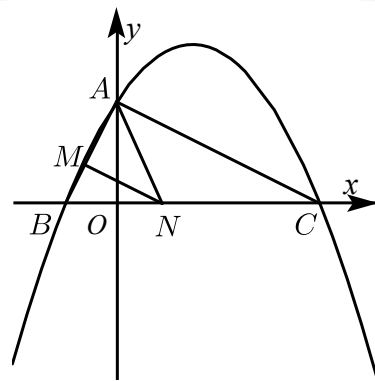
【知识点】二次函数与等腰三角形结合

【知识点】二次函数的几何问题

【知识点】二次函数一般式

【知识点】二次函数与坐标轴交点

21. 如图, 已知二次函数 $y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 4$ 的图象与 x 轴交于点 $B(-2, 0)$, 点 $C(8, 0)$, 与 y 轴交于点 A . 连接 AC 、 AB , 若点 N 在线段 BC 上运动 (不与点 B 、 C 重合), 过点 N 作 $NM \parallel AC$, 交 AB 于点 M , 当 $\triangle AMN$ 面积最大时, 求 N 点的坐标.



【答案】 $N(3,0)$.

【解析】 设 $\frac{BN}{BC} = k$,

$\therefore NM \parallel AC$, $\therefore \triangle BMN \sim \triangle BAC$,

$$\therefore \frac{BM}{BA} = \frac{BN}{BC} = k ,$$

$$\therefore \frac{AM}{AB} = 1 - \frac{BM}{AB} = 1 - k ,$$

$$\therefore S_{\triangle AMN} = \frac{AM}{AB} \cdot S_{\triangle ABN} = \frac{AM}{AB} \cdot \frac{BN}{BC} \cdot S_{\triangle ABC}$$

$$= (1 - k)k \cdot S_{\triangle ABC}$$

$$= \left[-\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \right] \cdot S_{\triangle ABC} ,$$

$\therefore$ 当 $k = \frac{1}{2}$ 时 , $\triangle AMN$ 面积最大 .

$\therefore BN = 5$, $N(3,0)$.

故答案为 : $N(3,0)$.

【标注】 【知识点】 二次函数与面积